Experimentelle Mathematik

von
Hermann Kautschitsch
UBW Klagenfurt

Die Methode des logisch-deduktiven Schließens ist sicherlich untrennbar mit der Mathematik verbunden und jeder Schüler soll mit ihr konfrontiert werden. Zum Anwenden von Mathematik und zum Lösen mathematischer Probleme reicht aber Deduktion nicht aus, sie ist nur eine Seite des mathematischen Denkens, die zweite Seite ist die schöpferische Konstruktion. COURANT-ROBBINS [6]: "Wenn die kristallisierte, deduktive Form das letzte Ziel ist, so sind Intuition und Konstruktion die treibenden Kräfte". Diese beiden Seiten bedingen und ergänzen sich wechselseitig. Die logische Strenge in der Darstellung der Ergebnisse verleiht der Mathematik Sicherheit, die Konstruktion ermöglicht (größtenteis) überhaupt erst die Ergebnisse.

Auch der Schulunterricht sollte beide Gesichter der Mathematik vermitteln, wobei die "induktive Mathematik" als Gegensatz zur "deduktiven Mathematik" für den späteren Nichtmathematiker (und das sind fast alle der Schüler) beinahe noch wichtiger ist, vor allem deren Methoden:

1. Das Herantasten an ein Ergebnis durch spezielle Beispiele und Experimente
2. Mathematisierung einer Situation
3. Beweisen als forschendes Beweisen auf dem Weg zum vermuteten Ergebnis, nicht nur als Verknüpfung von Axiomen und logischen Schlußregeln.

Über Mathematisierungen und Beweisen im Schulunterricht wurde schon viel geschrieben, auch die ersten beiden Kärntner-Symposien waren diesen Themen gewidmet. In dieser Abhandlung soll nun der erste der oben genannten Aspekte induktiver Mathematik untersucht werden, der nicht so sehr curriculare Überlegungen enthält als vielmehr Überlegungen zur Unterrichtsmethode: Experimentelle Mathematik

Was ist experimentelle Mathematik?

1. Beschreibung der experimentellen Mathematik

Bei dieser Unterrichtsform bzw. bei dieser Art von Erkenntnisgewinnung im Bereich der Mathematik wird die Tätigkeit des Physikers und anderer Naturwissenschaftler nachgeahmt, deren wichtigste Quelle der Erkenntnisgewinnung das Experiment ist. In den Naturwissenschaften experimentiert man, wenn man unter absichtlich herbeigeführten und kontrollierten Bedingungen beobachtet. Einige der für naturwissenschaftliche Experimente typischen Merkmale lassen sich aber auch auf den Bereich der Mathematik übertragen. Eine experimentelle Behandlung mathematischer Fragestellungen könnte (sollte) daher folgende charakteristische Merkmale aufweisen:

(E1) Nicht zufälliges, sondern gezieltes Herbeiführen verschiedener mathematischer Situationen, die einen Beitrag zur Fragestellung leisten können

(E2) Sammeln von Daten

(E3) Entnahme der in jedem Experiment für die Fragestellung relevanter Informationen

(E4) Abänderung der einzelnen Bedingungen, um bessere Informationen zu erhalten

(E5) Prüfung der Auswirkung der Variation der Bedingungen

(E6) Bilden von Hypothesen

(E7) Überprüfung der Hypothesen an anderen Experimenten

Als Unterrichtsmethode steht "Experimentelle Mathematik" im Gegensatz zur"Vorgetragenen Mathematik",auch wenn diese gelegentlich durch Fragen an die Schüler unterbrochen sein sollte. Diese Unterrichtsform ist gekennzeichnet durch ein möglichst rasches Aneignen von leicht abprüfbaren Kenntnissen und Fertigkeiten, die vom Lehrer möglichst gut methodisch aufbereitet werden. Nicht nur FREUDENTHAL lehnt eine "fertige Mathematik" ab und fordert statt dessen eine mit echten Schüleraktivitäten verbundene Genese mathematischer Prozesse.

Scharf ausgefrückt lautet dies bei ihm:
"Einem Kind ein Geheimnis zu verraten, daß es selber entdecken kann, ist schlechte Didaktik, es ist ein Verbrechen".
KERSCHENSTEINER sagt:
"Der einzige Irrtum ist, daß die Erkenntnisse mit bloßen Kenntnissen verwechselt werden. Erkenntnisse haben immer einen Wert, weil ihre Erwerbung mit schwerer geistiger Arbeit verbunden ist".

Den ersten Hinweis auf die Bedeutung der Eigentätigkeit des Kindes beim Aufbau mathematischer Verfahren findet man in dem 1702 erschienenen Mathematikbuch von J. Chr. STURM [22]: In seiner "Arithmetica juvenilis" fordert er, daß die Schüler das Einmaleins "nicht wie die Papageien / ohne Bedacht" erlernen sollen, sondern"mit Verstand und eigenem Nachdenken dergestalt / daß sie es zu vorher selbst machen und erfinden".

Bei der vorgetragenen Mathematik lernt man diese in der Regel dadurch, daß man passiv in sich die Inhalte anhäufen läßt. Bei der experimentellen Mathematik ist Mathematiklernen ein Prozeß, bei dem die Schüler durch eigenes Tun die zum Aufbau mathematischer Begriffe notwendigen Erfahrungen in Form von Erfolgen bzw. Mißerfolgen sammeln.

Bei der vorgetragenen Mathematik lebt der Schüler von Berichten, die andere gemacht haben, bei der experimentellen Mathematik darf er selbst erleben und muß selbst berichten. Erst dann wird formalisiert und abstrahiert. Die deduktive Form ist nicht verpöhnt, sondern letztes Ziel; Intuition, Probieren und Konstruktion sind die treibenden Kräfte (COURANT). Experimente des Handelns und Experimente des Denkens schließen einander nicht aus, sie sind notwendig füreinander. Kerschensteiner spricht von "körperlich-geistiger Arbeit". Experimentiert kann mit den einfachsten Dingen werden:
Spiegeln, Papier (Falten), Stäben, Geotafel, Tangrams, geometrische Figuren, Taschenrechnerzahlen, Zufallszahlen, Tabellen, geometrische Konstruktionen, Diagrammen und

Graphen usw.
Gerade durch die weite Verbreitung der Tisch- und Taschenrechner ist die Zeit reif geworden für eine Reform der mathematischen Darbietung.

2. Warum experimentelle Mathematik?

In den folgenden Punkten sollen einige Gründe für diese Unterrichtsform dargelegt werden.

a) Situation des derzeitigen Mathematikunterricht.
In der Öffentlichkeit und in den Medien steht die Mathematik und der Mathematikunterricht nicht immer im besten Licht da (man rühmt sich, in Mathematik nichts gekonnt und verstanden zu haben, bzw. nichts mehr zu wissen, Nachhilfeunwesen). Zu dieser Situation hat sicherlich Verschiedenes beigetragen: Schulorganisatorische Bedingungen, ein Zeitgeist, in dem Leistungsstreben eher fragwürdig geworden ist, und Mathematik spielt noch immer keine Rolle im kulturellen Bewußtsein (auch gebildeter Menschen). Einiges trägt vielleicht auch der Unterricht selbst bei: Eine am mathematischen Institut der UBW Klagenfurt umfangreich durchgeführte empirische Untersuchung des Mathematikunterrichts an den österreichischen Schulen und der dafür verwendeten Schulbücher hat im wesentlichen ergeben ([7]):

(i) Der Mathematikunterricht berücksichtigt zu wenig die Verbindung zur Erfahrungswelt des Schülers und zu anderen Wissensgebieten, es werden zu wenig Anwendungen behandelt, der Schüler wird zu wenig für die Mathematik motiviert.
Vermutete Auswirkung: Mathematik wird als eine in sich geschlossene Wissenschaft, ohne Bezug zu Lebenssituationen empfunden, der Mathematikunterricht als eine Einrichtung von Mathematikern für Mathematiker.
Die an der Universität Linz durchgeführten Projekte

zeigen, daß auch mit den in der Schule vermittelten Kenntnissen in einigen Betrieben Verbesserungen erreicht werden konnten. Es mag sein, daß man Mathematik tatsächlich in der österreichischen Wirtschaft, (Verwaltung) so wenig braucht, so wie eine Befragung der österreichischen Maturanten ergab (siehe [5], es könnte aber sein, und die Projekte in Linz erhärten diese Annahme, daß man gar nicht weiß, welche Vorteile ein mathematischer Einsatz bringen würde oder aber, Betriebsleitung bzw. Maturanten vertrauen nicht einem solchen Einsatz, eben durch die eigene Erfahrung mit Mathematik in der Schule, weil man ja nie die reale, konkrete Wirksamkeit von Mathematik bei der Lösung praktischer Probleme erlebt hat, sondern nur mit eher konstruiert wirkenden, lebensfernen Aufgabenstellungen befaßt wurde.

Nicht nur eine praxisorientierte Mathematik (wie es ja jetzt immer mehr üblich ist), sondern vor allem eine experimentelle Mathematik könnte das mathematische Bewußtsein der Menschen verbessern und den adequaten Einsatz mathematischer Verfahren ausweiten.

(ii) Die vermittelten Kenntnisse und Fähigkeiten liegen weitgehend auf kognitiv niederen Niveaus von Wissen und Routinefertigkeiten. Fachübergreifende Fähigkeiten werden kaum angestrebt und noch seltener erreicht. Vermutete Auswirkung: Der Mathematikunterricht wird als Ansammlung und Weitergabe von nur eingeschränkt verwendbaren (und bald vergessenen) Begriffen, Formeln und Verfahren angesehen.

Durch die experimentelle Mathematik dagegen könnten kognitiv höhere Niveaus (Argumentieren, kreatives Verhalten, Mathematisieren) entwickelt werden, weil einfach Zeit für produktives Nachdenken, für eigenständiges Probieren und Suchen von Lösungswegen bereit gestellt werden muß. Dies bedeutet weniger Themen in der Schulmathematik, aber nicht weniger Mathematik, experimentelle Mathematik bewirkt keine Verdünnung von Mathematik, im Gegenteil.

(iii) Der Mathematikunterricht konfrontiert den Schüler zu sehr mit "fertigen Wahrheiten".
Dadurch wird der Unterricht als Wiedergabe fremder Meinungen und Ideen erlebt, Mathematik als "Geheimwissenschaft" - erfunden von einigen besonders klugen Köpfen " (FREUDENTAHL).
Es ist klar, daß experimentelle Mathematik, durch die Betonung auf das "Selbst-Entdecken" diesen Auffassungen entgegenwirkt.

Zusammenfassung:

Nicht nur curriculare Änderungen, sondern gelegentlich andere Unterrichtsmethoden können zur Verbesserung der Unterrichtssituation beitragen. Experimentelle Mathematik könnte das mathematische Bewußtsein der Menschen verbessern und den Einsatz mathematischer Verfahren ausweiten, höhere Niveaus bei den vermittelten Kenntnissen und Fertigkeiten erreichen und Mathematik nicht als Geheimwissenschaft empfinden lassen.

b) Mathematik in der beruflichen Praxis von Maturanten

Unter diesem Titel fand ebenfalls am Institut für Mathematik der UBW Klagenfurt eine Untersuchung statt, die sowohl Maturanten in der beruflichen Praxis als auch leitende Angestellte erfaßte (siehe [5]). Als Ergebnis kam heraus:
Mathematik an sich als formale Theorie ist für die berufliche Tätigkeit von Maturanten nicht wichtig, zahlreiche Inhalte der höheren Schulen treten äußerst selten auf, mit Anwendbarkeit können nur wenige Teile des Lehrplanes legitimiert werden. In der Regel werden nur Inhalte und Verfahren der Unterstufe breit benötigt, sieht man von statistischen Methoden und solchen aus dem Gebiet der Funktionen und Gleichungen ab. An inhaltsübergreifenden mathematischen Qualifikationen werden übereinstimmend von Maturanten und leitenden Angestellten genannt:
Formeln wissen, in Formeln einsetzen können, Formeln um formen können, Texte mit mathematischen Elementen er-

fassen können, Tabellen erfassen können, verschiedene Darstellungsformen ineinander überführen können, mathematische Darstellungen in der Wirklichkeit interpretieren können, in außermathematischen Problemstellungen mathematische Elemente selbständig erkennen und zur Problemlösung heranziehen können, rechnen können.

Neben diesem Erwerb mathematischer Qualifikationen bildet einen weiteren Schwerpunkt der Erwerb formaler, fachübergreifender Qualifikationen:
Generalisieren, Analogisieren, Formalisieren, Argumentieren, kreatives Verhalten, Kritikfähigkeit und ähnliches. Obwohl ein Großteil der Befragten mit der inhaltlichen Ausbildung zufrieden ist, zeigen die vielen und relativ ausführlich gehaltenen Antworten auf die Frage nach Maßnahmen zur Erhöhung der Effizienz des Mathematikunterrichts im Hinblick auf berufliche Anforderungen, daß auf die Vermittlung von diesen inhaltübergreifenden mathematischen und formalen Qualifikationen (neben dem einheitlichen Aufschrei nach mehr Praxisbezug) besonderer Wert gelegt wird. Stellvertretend seien einige dieser Antworten genannt:
"Erziehen zum selbständigen Erkennen und Analysieren von Problemen" - "Besseres Verstehen der mathematischen Vorgänge" - "Theoretische Ausbildung ist recht gut. Den Schülern fällt es aber schwer zu verstehen, wie etwa mit diesen Kenntnissen in der Praxis gerechnet werden kann" - "Erwerb von Dingen, die mit Mathematik im engeren Sinn nichts zu tun haben: Angstabbau, Kreativitätssteigerung, Kombinationsfähigkeit, Selbstsicherheit" - "Freude am Nachdenken und an logischen Überlegungen fördern".

Selbstverständlich müssen diese Fähigkeiten an konkreten Inhalten erworben werden (kein inhaltsleerer Unterricht), teils durch Anstreben höherer Niveaus, teils durch einen Unterricht, in dem der Schwerpunkt (auch bei Prüfungen) vom bloß reproduzierten Wissen einzelner Inhalte und Verfahren zu den allgemeineren Qualifikationen verschoben wird. Auch lassen sich solche Qualifikationen nur über lange Zeit der Schulung und Bewußtmachung vermitteln, man muß daher von Anfang an auch andere Unterrichtsmethoden anwenden: Eben die experimentelle Mathematik. Die in den Punkten (E1) bis (E7) aufgezählten Merkmale eines experimentellen Unterrichts vermitteln geradezu in idealer Weise (weil in Selbsttätigkeit erworben) die oben genannten für das Berufsleben von Nichtmathematikern (und das sind fast alle Absolventen der Schule) relevanten mathematischen und formalen Qualifikationen.

Zusammenfassung:

Experimentelle Mathematik bereitet besser auf das Berufsleben vor, weil sie dem Schüler mehr inhaltübergreifende mathematische Qualifikationen und formale Qualifikationen vermittelt.

c) Denkpsychologische Gründe

Mathematik ist ein Denkfach, das Denken ist die wichtigste Quelle von Erkenntnissen und die Fähigkeit, in mathematischen Bahnen zu denken, ist die Voraussetzung zur Bewältigung entsprechender Sachverhalte im späteren Berufsleben. Die moderne Entwicklungs- und Denkpsychologie, vor allen J. PIAGET, haben auf die bedeutsame Rolle der Aktivität bei Denkprozessen und damit bei der Erkenntnisgewinnung in Mathematik hingewiesen. Ausbildung des logischen Denkens allein ist zuwenig, es bedarf auch fachbezogener Denkinhalte (Denkmittel, "Operationen"). Piaget hat durch sorgfältige Untersuchungen nachgewiesen, welch entscheidenden Wert die Selbsttätigkeit des Kindes und das Manipulieren mit und an den Dingen für die Bildung der Denkmittel haben. Diese sind nach Piagets Auffassung "verinnerlichte Handlungen des Menschen" ([16]), die in einem Fortschreiten von aus konkreten Handlungen hergeleiteten Aussagen zu allgemeingültigen, vom einzelnen Sinnesding losgelösten innerlich angeschauten Vorstellungen hin, auf ihr strukturelles Skelett reduziert wurden (AEBLI [1]).

Gerade den fundamentalen mathematischen Begriffen liegen

Handlungen zugrunde und sollen daher durch Abstraktion von Handlungen gebildet werden, im Gegensatz zu empirischen Begriffen (wie "Blume", "blau"), die durch Abstraktion von Objekten gewonnen werden (Operative Begriffsdefinition; WITTMANN [24]).

Die Aktivität erschöpft sich nicht nur in einem bloß manuellen Tätigsein. Erst im wechselseitigen Spiel von "Tun und Denken" vollzieht sich der Aufbau der Operationen (GOETHE [10]).

Die so erworbenen Operationen bilden dann die Werkzeuge des Geistes, mit deren Hilfe der Mensch auf der höchsten Stufe des Denkens, dem logisch-formalen Denken, fähig wird, ohne jeden Bezug zu einem konkreten Gegenstand zu neuen Erkenntnissen zu gelangen. Dieses formal-logische Denken entwickelt sich durchschnittlich mit dem 15. Lebensjahr, formale Logik und die mathematische Deduktion bleiben dem Kinde daher unerreicht. In der Unterstufe wäre also experimentelle Mathematik die altersgemäße Unterrichtsform.
Aber auch für spätere Entwicklungsstufen ist diese Unterrichtsform adäquat, sogar dem Mathematiker sind experimentelle Methoden nicht unbekannt. Wie oft wird der Wahrheitsgehalt eine Vermutung durch Wiederholung von Manipulationen durch vergleichende Betrachtung wahrscheinlicher gemacht. Solange sich der Schüler noch nicht auf der Ebene des formal-logischen Denkens frei bewegen kann, und das ist im Anfangsstadium bei der Einführung eines neuen Begriffes, so glaube ich, stets der Fall, sollte man sich vorwiegend der Methode der empirischen Wissenschaften bedienen.

Zusammenfassung:

Experimentelle Mathematik entspricht den entwicklungs- und denkpsychologischen Erkenntnissen beim Denkprozeß, ermöglicht überhaupt erst den Aufbau und Bildung von "frei beweglichen Operationen" und berücksichtigt die aus der Piagetschen Psychologie zwingend folgenden Unterrichtsprinzipien des aktiven Lernens und des operativen Prinzips.

d) Förderung des Transfers, d.h. die Übertragung gelernter Verhaltensweisen und Kenntnisse auf neue Situationen. Heute kann in der Schule nicht mehr alles gelernt werden, der Schüler kann nicht für alle Situationen im Berufsleben vorbereitet werden. Daher muß die Förderung des Transfers als ein wesentliches Lehrziel des Unterrichts angesehen werden. Auch in den Antworten der leitenden Angestellten in [ ] kommt dies deutlich heraus, sie sprechen von einer Besserung der Grundlagenausbildung. Positive Transfer ist nur dann zu erwarten, wenn die Übertragbarkeit selbst zum Unterrichtsgegenstand gemacht wird [11]. Ob sich Transfer einstellt oder nicht, hängt entscheidend von der methodischen Gestaltung des Unterrichts ab:
In Untersuchungen zum Transfer wurde beobachtet, daß sich "Lernresultate, die mit Einsicht in die angewandten Strukturen oder Prinzipien erworben wurden, eher auf neue ähnliche Lernsituationen übertragen ließen als Lernergebnisse, die ohne Verständnis erzielt wurden" (JÜNGEL [11]).

Für BERGIUS ([4]) ist nachgewiesen, "daß bereits das aktive Erarbeiten der Regel zu besseren Ergebnissen führt als ihre bloße verbale Übermittlung". Experimente von Dienes und JEEVES (1969) zum Begriff "Gruppe" zeigen ebenfalls, daß aktiv erarbeitete Regeln größere Transferwirkung besitzen als nur gedächtnismäßig eingeprägte.

Zahlreiche Versuche wurden angestellt um festzustellen, wie frühere Erfahrungen und Gelerntes in Denkprozessen eine Rolle spielen. Die Resultate weisen darauf hin (ROHRACHER, [47]), daß Erfahrungen an sich nicht die Lösung ermöglichen, dafür sind nur die "verfügbaren Erfahrungen" relevant (SAUGSTADT [48]). Aus den denkpsychologischen Versuchen muß man schließen, daß es für die Wirksamkeit früherer Erfahrungen auf alle Fälle darauf ankommt, daß diese wirklich verstanden worden sind, was durch das aktive Lösen einer Aufgabe besser erreicht wird, als durch bloße Demonstration.

Versuche von KATONA (1940) und SZEKELY (1950) weisen nach, daß die Gruppe von Versuchsprozessen, die mit fertigen Lösungen und Wahrheiten konfrontiert wurde, wesentlich schlechter abschnitt als eine nach "modernen" Methoden unterrichtete Gruppe. Auch die Übertragung (TRANSFER) der an einem Beispiel gelernten Fertigkeiten auf andere Beispiele gelang besser.

Tabelle

Wirkung des "modernen" und des "traditionellen" Erfahrungserwerbes (nach Szekely 1950b)

	Problem gelöst	Problem nicht gelöst	Total
Moderne Lehrmethode	13	7	20
Traditionelle Lehrm.	4	16	20
	17	23	40
	$\chi^2=6{,}54$		

Die Art des Lernens hat also einen deutlichen Einfluß auf die Verwertbarkeit von Erfahrungen. Ein chinesisches Sprichwort, das nur in einer englischen Übersetzung bekannt geworden ist, betont dies:
I hear, and I forget - I see, and I remember - I do, and I understand.
Noch ein Aspekt ist erwähnenswert:
Bei der experimentellen Mathematik ist der Schüler gezwungen, sich in seinen eigenen Worten auszudrücken, er muß seine selbst gefundenen Resultate in eine formalisierte Sprache übersetzen. FREUDENTHAL ist der Meinung, daß "das Formalisieren sich in der Zukunft als die am wirksamsten transferable Tätigkeit des Mathematikers erweisen wird".

Zusammenfassung:

Experimentelle Mathematik fördert den Transfer mathematischer Methoden, Regeln und Qualifikationen auf außermathematischen Gebieten.

e) Lernpsychologische Gründe

Schon im letzten Abschnitt hatten wir festgestellt, daß die Art des Lernens einen Einfluß auf die Denkkraft des Schülers hat. Mechanisches Lernen arithmetischer und geometrischer Fakten führt zu verständnislosem Wortgebrauch, zu starren Operationen, die in der praktischen Anwendung ihre Bewährungsprobe nicht bestehen. Die früher genannten empirischen Untersuchungen zeigen dies deutlich. Auch durch Veranschaulichung (allein) ändert sich nicht viel daran. Der Schüler nimmt nur als Zuschauer am Unterricht teil und nur die wenigsten Schüler sind imstande, vorgeführte Operationen oder auch Erklärungen im Schulbuch innerlich nachzuvollziehen. Aber auch wenn das zutrifft, "Nachvollziehen im rezeptiven Denken ist nicht das gleiche wie Selbstvollziehen im produktiven Denken" (FRIES, [9]). Nur ein geringer Prozentsatz wird sich später beim Gebrauch der Symbole und Zeichen der Operationen erinnern können, die durch sie verkörpert werden. Wäre das erworbene Wissen ein vom Aneignungsprozeß isoliertes Ergebnis, dessen mehr oder weniger stereotype Wiedergabe eine sichere Anwendung im späteren Leben garantiere, dann müßte man als Lehrer nur dafür sorgen, daß Lehrsätze, Formeln usw. auswendig gelernt werden, eine anschauliche Darbietung wäre dann die notwendige Gedächtnisstütze, nichts weiter, als eine Hilfe, die Bilder im Gehirn zu fixieren. Das Wissen ist aber das Ergebnis eines Denkprozessen. Dagegen erzwingt die Schule einen Lernprozeß, der auf kurzfristige Aneignung leicht abprüfbarer Kenntnisse und Fähigkeiten hinausläuft. Dagegen betonen Lernpsychologen:

Dauerhafte, frei bewegliche Operationen und leicht reproduzierbare Kenntnisse werden nur erworben, wenn die Schüler möglichst weitgehend im "Tun und Denken" (dies im Sinne des Nebeneinanders und Ineinanders) an ihrer Erarbeitung beteiligt sind. Nur im Verlaufe des Suchens und Forschens (WITTMANN, [24]: "Übertragung originärer Elemente mathematischer Forschung in den Unterricht") vollzieht sich ein Fortschritt des Denkens und es kommt zur

Bildung von Denkmittel, die mehr sind als mechanische Vollzüge.

Eine Unterrichtsform, die diesen Erkenntnissen adäquat ist, ist die experimentelle Mathematik. Das eigene Tun beansprucht von Haus aus einen längeren Zeitraum, aus der Lernpsychologie weiß man, daß Inhalte des Kurzzeitgedächtnisses umso wahrscheinlicher ins Langzeitgedächtnis übernommen werden, je länger der Inhalt im Kurzzeitgedächtnis verweilt.

KULKIES und VAN BRACH (1967) [15]:

Behaltwert

Man behält

von dem, was man liest	etwa 10%
von dem, was man hört	20%
von dem, was man sieht	30%
von dem, was man sieht und hört	50%
von dem, was man selbst vorträgt	70%
von dem, was man selbst ausführt	90%

Zusammenfassung:

Experimentelle Mathematik ermöglicht dauerhafte, frei beweglichere und leicht reproduzierbare Kenntnisse.

f) Affektive Gründe

Durch die Überbetonung nicht gerechtfertigter Strenge am Anfang werden die Schüler geschreckt, der Aufbau der Fachsprache ("Jus-Mathematik") würgt die Phantasie der Kinder ab. HÜRTEN: "Am Seil logischer Deduktionen werden die Schüler an der Außenmauer des mathematischen Gebäudes hochgehievt oder die Schüler werden in den Keller geschickt, um die Grundlagen der Mathematik abzuklopfen. Nur ins Gebäude selbst dürfen die Schüler nicht. Die heilig-geordnet-angestellten Lehrsätze und Definitionen könnten zu leicht durcheinander gebracht werden, wenn unbedacht mit Mathematik gespielt wird".

Nach WINTER setzt das Lernen kognitiver Strategien affektive Dispositionen voraus: Der Schüler muß bereit sein, Mathematik zu betreiben. Wirkliche Erkenntnis muß vom Schüler auch gefühlsmäßig akzeptiert werden können und damit nicht nur im kognitiven Bereich, sondern auch im affektiven Bereich fest verankert werden. Eine auf solchem Weg gewonnene Erfahrung haftet besser und ist wieder leichter aktivierbar. Durch experimentelle Mathematik könnte der Schüler (zumindest ist ihm dazu die Möglichkeit mehr als bei der Präsentation von Mathematik als Fertigprodukt gegeben):

- Bereitschaft zum Mitmachen entwickeln
- Freude und Stolz über den erfolgreichen Abschluß mathematischer Untersuchungen empfinden
- die Mathematik als relevant und nützlich verstehen
- mit Begeisterung, Zielbewußtsein und Konzentration arbeiten
- Freude und Interesse an der Mathematik und eine positive Einstellung zum Fach entwickeln
- Selbstvertrauen bei mathematischen Arbeiten gewinnen. (Siehe dazu WITTMANN [24]).

Auf die experimentelle Mathematik ließe sich der Ausspruch von K.C. HAMMER: "Der in der Mathematik am meisten vernachlässigte Existenzsatz ist die Existenz des Menschen" kaum anwenden, der Unterricht wird sicher menschlicher.

Dadurch, daß der Schüler über seine Ergebnisse berichten muß, kommt er in die Lage, für ein Ergebnis voll einzustehen. Das ist auf keinem Gebiet so leicht möglich wie auf dem Gebiet der Mathematik: Erstens hat man hier die Möglichkeit, Erkenntnisse nicht nur durch Überlieferung zu gewinnen, zweitens bietet sie zu jeder Aussage zugleich auch ein Verfahren, ihre Wahrheit zu überprüfen. Vom Schüler zu verlangen, daß er seine Lösungen (Ergebnisse) verteidigt, ist nicht unbillig:
"Nur wenn sie lernen, ihre Lösungen zu verteidigen, werden sie das frohe Gefühl erleben, wirklich etwas geleistet zu haben" (SCHULER [20]):

Außerdem: soll später einmal der Erwachsene Fragen an die

Umwelt stellen und Kritik hervorbringen können, muß er als Kind daran gewöhnt worden sein. Auch die für viele experimentelle Untersuchungen notwendige Gruppenarbeit gewöhnt die Schüler an diese Arbeitsform.

Zusammenfassung:

Experimentelle Mathematik ermöglicht die Erreichung affektiver Ziele und die Entfaltung der Persönlichkeitsstruktur des Schülers.

g) Motivation für deduktive Mathematik

Experimentelle Mathematik soll nicht im Gegensatz zur deduktiven Arbeitsweise verstanden werden, im Gegenteil. Durch Experimente gewonnene Vermutungen sind unsicher, diese Erfahrung werden die Schüler bald machen, durch Wiederholungen wird nur der Wahrscheinlichkeitsgrad der Wahrheit der Aussage erhöht. Sobald sich der Schüler auf der Ebene des formal-logischen Denkens bewegen kann, wird er das Bedürfnis haben, die Allgemeingültigkeit seiner gefundenen Vermutungen zu beweisen, um so Sicherheit zu gewinnen.

Zusammenfassung:

Experimentelle Mathematik steht nicht im Gegensatz zur deduktiven Mathematik, sondern motiviert sie.

3. Beispiele

Es sollten, wenn möglich, die traditionellen Inhalte auf experimentelle Behandlung hin überprüft werden. Wegen des selbsttätigen Charakters kann eine Unterrichtsstunde nicht vollständig durchgeplant werden, man muß riskieren, daß manche Tätigkeiten und Einfälle der Schüler nicht zum Ziel führen. Die folgenden Beispiele sollen daher nur so verstanden werden, daß sie einen möglichen Unterrichtsablauf darstellen könnten, gewisse Lenkungsmanöver werden ja sicherlich, speziell in der Anfangsphase, notwendig sein.

a) Flächeninhalt und Umfang des Kreises

1. Einführungsaufgabe siehe dazu [9] : Eine Gärtnerei soll

3 Randbeete bepflanzen: ein großes im Park (d_1=16m) und zwei kleinere auf einem Spielplatz (d_2=13m, d_3=8m). Pro Pflanze rechnet man 1dm^2 Platz. Wohin würdest Du die meisten Pflanzen bringen?
Wegen $d_1 < d_2+d_3$ vermutet man die meisten für den Spielplatz. Wegen $d_1^2 > d_2^2+d_3^2$ kommt man zur entgegengesetzten Behauptung.

2. Mathematisierung der Aufgabe: Gegeben sind 3 Kreise mit den Durchmessern 16m, 13m, 8m. Gesucht ist ihr Flächeninhalt.

3. E1*: "Ausschöpfen" der Kreisfläche mit Rechenkästchen. Notwendig ist eine rationelle Auszählmethode: Meßquadrate im Viertelkreis mal vier. Beim Auszählen (E2) ergeben sich bei den einzelnen Schülern große Unterschiede. Anlegen einer Tabelle.

4. E4: Kreise zeichnen auf Millimeterpapier. Zählen 1cm^2, $\frac{1}{4}cm^2$, 1mm^2. Anzahl der Millimeterquadrate, die durch Kreislinie getrennt werden. Prüfung der Auswirkung zur 1. Zählmethode (E5).
Die auftretenden Diskrepanzen ergeben sich aus der Auszählung der mm^2. Man sucht Teilquadrate, die sich zu einem ganzen Millimeterquadrat ergänzen (schwierig) oder man nimmt an, daß ebensoviele Teile innerhalb wie außerhalb liegen, zählt alle Millimeterquadrate, durch die die Kreislinie hindurchgehen und bildet das arithmetische Mittel.

Die nun auftretenden Symbole E1, E2,... beziehen sich auf die in Punkt 1 aufgezählten Merkmale eines experimentellen Unterrichts.

5. Bildung von Arbeitsgruppen: Auszählen von Kreisen gleichen Durchmessers in verschiedenen Lagen, Auszählen von Kreisen mit verschiedenen Durchmessern (E5).

6. Sammeln von Daten in einer Tabelle (E2)

Durchmesser	Radius	cm^2	$\frac{cm^2}{4}$	mm^2	A_V	A_O	A_E	r^2	d^2

7. Vergleich mit dem Flächeninhalt eines Kreises (A_E) mit Radius 1 (cm). Eventuell auch durch Abwiegen! (E5, E6). Ergänzen der Tabelle durch A_E.

   Vermutung: $A_O = r^2 \cdot A_E$

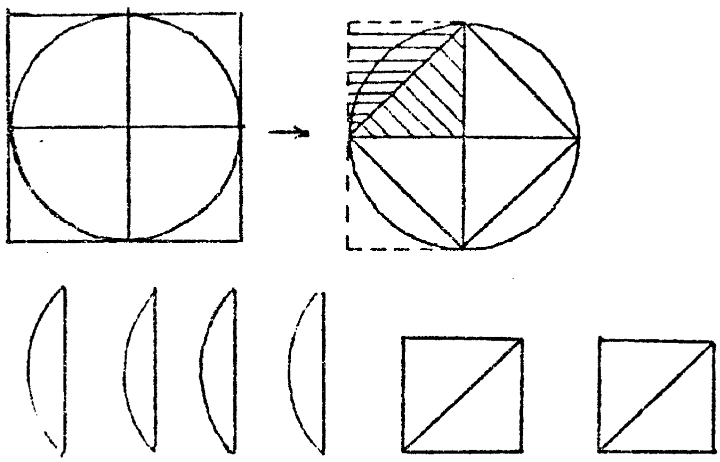
   Das Problem besteht nun darin, den Schülern den Zusammenhang zwischen Kreisinhalt und Radius oder Durchmesser oder Einheitskreis bewußt zu machen.

   Methode: Betrachtung der empirisch ermittelten Daten (E7). Dazu muß vorher die Fähigkeit, Tabellen interpretieren zu können, entwickelt worden sein, oder es wird an dieser Stelle geübt. Der proportionale Zusammenhang zwischen A_O und A_E ist ersichtlich. Da aber der Durchmesser (bzw. der Radius) das einzige ist, was man vom Kreis abmessen kann, ist es naheliegend, einen Zusammenhang mit diesen Bestimmungsstücken herzuleiten, ohne zu sagen, daß man r^2 oder d^2 untersuchen soll. Da man beim Quadrat auch das Seitenquadrat nimmt, ist es (vielleicht) naheliegend, in obiger Tabelle eine Spalte mit r^2 oder d^2 einzuführen. Einen Zusammenhang sucht man durch Differenzen - oder Quotientenbildung mit der A_O-Spalte. Dazu benötigt man mehrere Meßergebnisse (Gruppenarbeit). Vergleiche mit r^3 oder d^3 oder anderen Potenzen von r bzw. d schlagen fehl.

8. Zur Überprüfung der Vermutung wird ein anderes Experiment durchgeführt: Abzählen von Gitterpunkten (Millimeterpapier) bzw. von Zufallspunkten innerhalb eines Kreises bzw. innerhalb des Einheitskreises. Beide Anzahlen sind proportional dem Flächeninhalt (plausible

Annahme). Realisierung der Zufallspunkte durch Bürsten von Wasserfarbe über ein Malsieb, durch Taschenrechnerzahlen. Da man bei diesen "Monte-Carlo"-Mathoden "sehr viele" Punkte benötigt, ist Gruppenarbeit über längere Zeit (eventuell zu Übungen bei Koordinatensystemen) oder aber ein Rechner notwendig. Man beschränkt sich wieder auf den Viertelkreis.

9. Hat man den Flächeninhalt von Dreiecken und Trapezen ebenfalls durch experimentelle Methoden bestimmt, müßte eigentlich folgende Operation (als verinnerlichte Handlung) zur Verfügung stehen (E4):
Man vergleicht die zu bestimmende Fläche mit bereits bekannten Flächen, die mit Maßquadraten ausgelegt werden können. Durch obige Vermutungen unterstützt, versucht man es mit dem Durchmesser- bzw. Radiusquadrat. Auf Millimeterpapier zeichnet man einen größeren Kreis und um diesen das Durchmesserquadrat und die senkrechten Durchmesser:

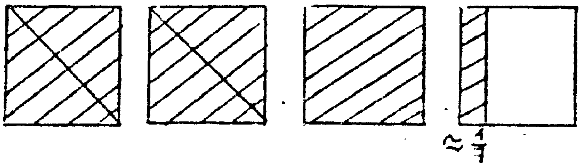


Ergebnis: Der Kreis ist kleiner als ein Durchmesserquadrat, also kleiner als vier Radiusquadrate und größer als zwei Radiusquadrate.

$A_o \approx \frac{3}{4} \cdot$ Durchmesserquadrat

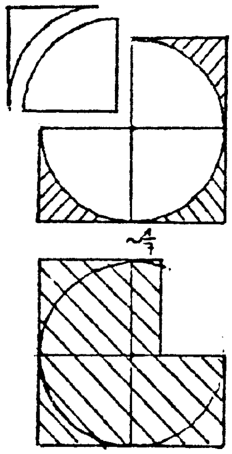
$A_o \approx 3 \cdot$ Radiusquadrat

Stimmt die Vermutung, dann kann man aus den 4 Kreisabschnitten noch ein drittes Radiusquadrat zusammensetzen. Wenn ein Rest bleibt, vergleicht man diesen mit einem 4. Radiusquadrat. Dazu zerlegt man die 4 Kreisabschnitte in ihre Kästchen und klebt diese auf das 3. Radiusquadrat, den Rest auf das 4. Quadrat.



$3\frac{1}{7}$ stimmt mit den Werten in der Tabelle (3,14) überein.

Eine zweite Gruppe arbeitet mit dem Durchmesserquadrat.



Verteilen den Kreisausschnitt auf die freigelassenen Abschnitte. Es bleibt ein Rest, der ein Siebentel eines Radiusquadrates bedeckt.

$A_o = 3\frac{1}{7}$ x größer als ein Viertel des Durchmesserquadrates.

$A_o = \frac{3\frac{1}{7}}{4}$ des Durchmesserquadrates

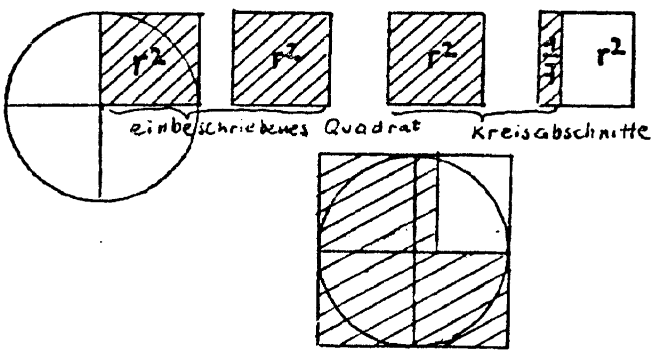
Ergebnis: Kreisfläche ist gleich 3,14 mal Radiusquadrat
Kreisfläche ist gleich $\frac{3,14}{4}$ mal Durchmesserquadrat.

Beide Gruppen lösen die Eingangsaufgabe. Die erste Gruppe mit den Radiusquadraten, die zweite mit den Durchmesserquadraten.

Bildliche Darstellung des Verfahrens:

1. Gruppe:

2. Gruppe:



Fläche des "Einheitskreises"

$A_E = 3,14 \cdot 1 = 3,14$

$A_E = \frac{3,14}{4} \cdot 4 = 3,14$

10. Vergleich der Flächen mit Monte-Carlo-Methoden

11. Herstellen von Zusammenhängen der Zahlenreihen (Tabellen interpretieren können). (E7)
Proportionale Zusammenhänge $\hat{=}$ Gerade $\hat{=}$ $y = k\,x$
Quadratische Abhängigkeit $\hat{=}$ Parabel $\hat{=}$ $y = a\,x^2$
Kubische Abhängigkeit $\hat{=}$ Parabel $\hat{=}$ $y = a\,x^3$

Da entsprechende Punkte nicht auf einer Geraden liegen, versucht man einen Zusammenhang mit r^2 bzw. d^2 herzustellen, zunächst mit den vier Grundrechnungsarten: $A+r^2$, $A-r^2$, $A \cdot r^2$, $\frac{A}{r^2}$. Bei $\frac{A}{r^2}$ ergeben sich annähernd konstante Zahlen, also ist $\frac{A}{r^2}$ der Flächeninhalt des Einheitskreises.

b) Experimentelle Behandlung der Exponentialfunktion

In diesem Beispiel werden vor allem die mathematischen Fähigkeiten "Erfassen und Deutung von Tabellen", "Aufstellen und Handhaben von Formeln", "Wechsel der Darstellungsformen", "Mathematische Darstellung in der Wirklichkeit interpretieren können" sowie einige formale Qualifikationen angesprochen. Es wird jedoch vorausgesetzt, daß der Schüler Erfahrung im Umgang mit Tabellen besitzt (siehe vorhergehendes Beispiel). E1-E7 sind die in Punkt 1 aufgezählten Merkmale eines experimentellen Unterrichts. Experimentiert wird mit Taschenrechnerzahlen, Tabellen und Funktionsgraphen.

1. Fragestellung: Formelhafte Darstellung von Wachstumsvorgängen [14]

Experiment: Simulation verschiedenster Wachstums- und Zerfallsprozessen mit den Taschenrechner. Ein einziger Tastendruck liefert jeweils die Menge nach einer weiteren Zeiteinheit. Enaktives Lösen der Frage nach der Zeitspanne, wann eine bestimmte Menge erreicht wird	E1 Enaktive Repräsentation des Begriffs: Exponentialfunktion, mathematische Texte lösen können, Interpretation in der Wirklichkeit. Motivation für formelhafte Darstellung

Anlegen einer Wertetabelle

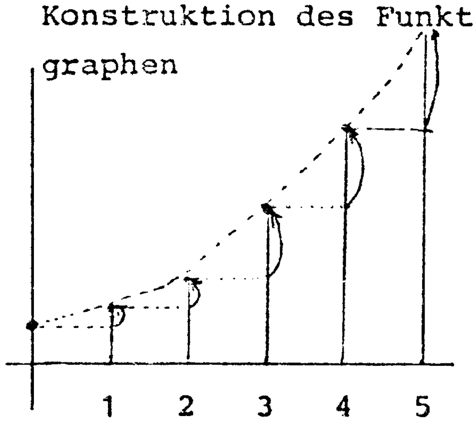
Zeiteinheit	Menge
1	
2	
3	
4	
5	
.	

E2

Ikonische Repräsentation der Exponentialfunktion.
Erkennen von Zusammenhängen in Zahlenreihen.
Wechsel der Darstellungsformen.

Diskrete Beschreibung eines kontinuierlichen Vorgangs und umgekehrt

Konstruktion des Funktionsgraphen



E2

Graphen zeichnen können.
Ordnen

Information

(E) <u>Zu gleichen Zeitspannen gehört stets der gleiche Wachstumsfaktor.</u>

Damit:

Zur n-fachen Zeitspanne gehört die n-te Potenz des Wachstumsfaktors

Zur halben Zeitspanne gehört die Quadratwurzel des Wachstumsfaktors

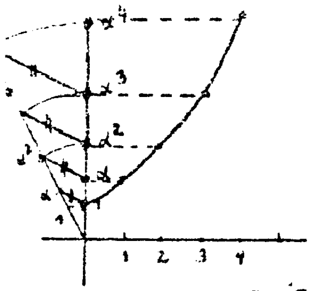
E3

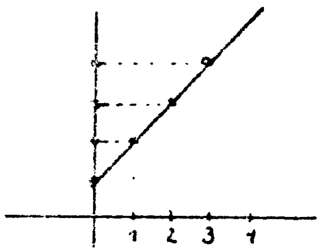
Sprachlich-symbolhafte Repräsentation der Exponentialfunktion

E6

Tabellen und Graphen interpretieren können.
Mathematische Darstellung in der Wirklichkeit interpretieren können.
Argumentieren.
Analogisieren.

Experiment: Man startet in einer Tabelle bei beliebigen Punkten und wählt beliebige Zeitspannen	E7
Information: Obige Vermutungen werden bestätigt	
Experiment: Testen von gegebenen Zahlenreihen auf proportionalem und exponentiellen Zusammenhang, geometrische Deutung am Funktionsgraphen mittels Strahlensatz.	E4, E5 Erfassen von Tabellen und Graphen. Argumentieren. Klassifizieren.



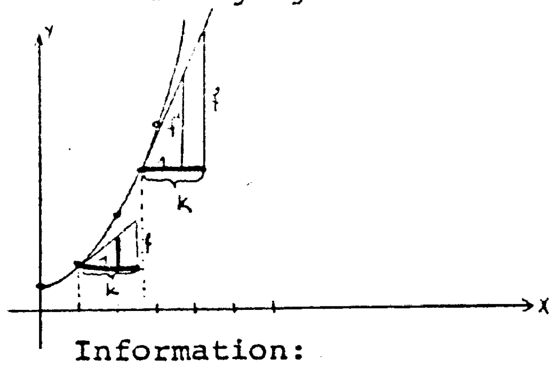


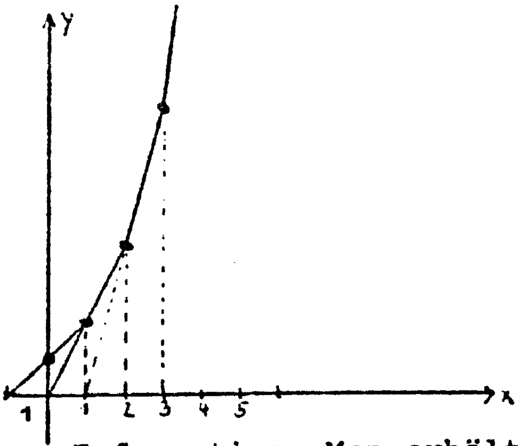
Definition: Eine Funktion mit der Eigenschaft (E) heiße exponentielle Funktion.	Begriff durch Abstraktion von Handlungen gebildet.
Experiment: Berechnung einer Exponentialfunktion durch 2 beliebige Punkte der oberen Halbebene durch sukzessives Halbieren der Zeitspannen	E1 Kreatives Verhalten. Wissenschaftliches Denken
Sonderfälle: Punkte auf Parallelen zu Koordinatenachsen	E4

Ausdrucken von Wertetabellen	E2
Information: <u>Durch je zwei Punkte der oberen Halbebene (nicht auf einer Parallelen zu einer Achse liegend) geht genau eine Exponentialfunktion. Diese ist injektiv.</u>	E3
Zur r-fachen Zeitspanne ($r \in \mathbb{R}$) gehört immer die r-te Potenz des Wachstumsfaktors.	E6
<u>Definition von b^r ($r \in \mathbb{R}$):</u> Wert der Exponentialfunktion durch (0/1) und 1/b) bei r	Analogisieren
Herleitung der Potenzregeln am Graphen oder an der Tabelle; Berechnungen von b^r.	Argumentieren. Erfassen von Tabellen und Graphen.
Herleitung der Funktionsgleichung: f sei eine Exponentialfunktion mit f(o)=a und f(1)=b	
<u>Experiment:</u> Aufstellen der Tabelle mit Hilfe des Taschenrechners	E4

x	f(x)	$\frac{1}{a}$ f(x)	b^x
0	a	1	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	

Information: $\frac{1}{a}\cdot f(x)$ ist ebenfalls eine Wachstumsfunktion (Grundeigenschaft (E) erfüllt), sie geht durch (0/1) und (1/b); daher	Umgang mit Tabellen. Interpretieren von Tabellen. Argumentieren.
$\frac{1}{a}f(x)=b^{x} \Leftrightarrow f(x)=a\ b^{x}$	Formal-symbolhafte Darstellung der Exponentialfunktion
Damit: $f(s+t)=\frac{f(s)\ f(t)}{f(o)}$	Wechsel der Darstellung
<u>2. Fragestellung: Ableitung der Exponentialfunktion.</u>	Enaktive Darstellung der Ableitung als relative Änderungsrate.
Änderungsrate für sehr kleines $h=\Delta x$ ist praktisch die punktweise Ableitung. Für numerisches Differenzieren gibt es genug Programme [2] [21].	E4
<u>Experiment</u>: Ausdrucken einer Wertetafel mit Schrittweite h der Ableitungsfunktion y' von $y=2^{x}$, h variieren lassen.	kleinere Schrittweite E5 Noch genauere Exponentialfunktionen
Tabelle $x \mid y \mid y'$	Interpretieren von Tabellen
Vergleich der Zahlenreihen y, y' läßt vermuten, daß es sich um eine Exponentialfunktion handelt:	E6
Tests auf proportionalem oder add. Zusammenhang schlagen fehl, Eigenschaft (E) scheint erfüllt zu sein; Vermutung: $y'\sim 2^{x}$.	E3

Experiment: "Bewegliche" Steigungsdreiecke	E7, E4 Wechsel der Darstellung. Umgehen mit Funktionsgraphen.
	E2 gleiches k
Information: $\frac{f'}{f} = k \Leftrightarrow f' = k \cdot f$ Die Änderung der Funktionswerte ist proportional zum Funktionswert.	E3
Was ist k? $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x)\cdot f(h)-f(x)}{h}$ $= f(x)\cdot \underbrace{\frac{f(h)-1}{h}}_{\to f'(o)}$ $\boxed{k=f'(o)}$	Umgehen mit Formeln E7 Tranfer des Ableitungsbegriffes. Argumentieren.
Man erkennt: Zwischen Änderungsrate einer Exponentialfunktion und der Funktion selbst besteht ein einfacher Zusammenhang: $\boxed{y'=k\cdot y}$ Umkehrung?	Formeln interpretieren und aufstellen können.
Experiment: Mittels Steigungsdreiecken für verschiedene k= 1, $\frac{1}{2}$, 2,.. ..; y(o)=1 (Gruppenarbeit)	E1 kreatives Verhalten Umgang mit Ableitungsbegriff



Information: Man erhält eine Kurve von "Exponentialgestalt".	E3 Kritikfähigkeit
Experiment: Verkleinern der Schrittweite, überprüfen der Grundeigenschaft mit dem Strahlensatz (siehe 1. Fragestellung). Bei sehr kleinen Schrittweiten aufstellen einer Tabelle mit TR. Überprüfen der Grundeigenschaft an Hand der Tabelle (gleicher Wachstumsfaktor für äquivalente Puntke)	E4 Umgang mit Graphen Umgang mit Tabellen E5 E7 Interpretation von Tabellen. Verständnis der Exponentialfunktion. Argumentieren
Information: Genau die exponentielle Wachstumsfunktionen $y = y(0) \cdot b^{kt}$ erfüllen die Dgl.: $y' = k \cdot y$	E6
Wie hängt $k = f'(o)$ von der Basis ab?	
Experiment: Wertetabellen (x/y/y') von $y = b^x$ für Basen b=2,3,5,10	E1 Wissenschafliches Denken. Kreatives Verhalten.

Information: Der Quotient	E2
$\frac{y'}{y}$ hat für jedes b eine	Argumentieren
eigene Konstante, eben	
$y'(o)$	E3
b=2 k=0,69	Interpretieren von Tabellen
b=3 k=1,10	
b=5 k=1,61	E2
b=10 k=2,30	Aufdecken von Zusammen-
Das sind Näherungswerte	hängen zwischen Zahlenreihen
von ln b.	
Dann wäre für $y=b^x$: $y'=$	E6
$=\ln b\cdot b^x$	Wechsel der Darstellung
Weitere Information: Für	
b=2 ist k < 1, für b=3	
ist k > 1. Die Änderun-	Kritikfähigkeit
gen scheinen stetig zu	
sein (weitere Experi-	
mente!)	E4
Gibt es ein b: 2 < b < 3	
mit $\frac{y'}{y} = 1 = y'(o) = k$?	
Experiment: Für b=2, 2+h,	E4, E7
2+2h, ... läßt man sich	Kreativität
$y_h'(o)$ ausdrucken.	Aufstellen von Tabellen
Tabelle $(y_h'(o) \mid h)$	E2
Information: Vergleich mit	E3
h-Spalte ergibt:	
$y_h'(o) = c\cdot h$	
Setzt man $h=\frac{1}{c}$, dann ist	Umgang mit Formeln
$y'(o)=1$	
Es gibt eine Basis $(2^{\frac{1}{c}} =: e)$,	
so daß die Ableitung mit	
der Originalfunktion über-	
einstimmt.	
$e \sim 2{,}718\ldots$	
$y=e^x \Rightarrow y'=e^x$	
$y=a^x \Rightarrow y'=\ln a\cdot a^x$	

Schlußbemerkungen:

Die Beispiele zeigen, daß "Exponentiellle Mathematik" viel Zeit kostet (schulorganisatorische Probleme - Doppelstunden - Auswahl des Lehrstoffes). Allerdings wird diese Zeit für Begriffsbildungen und den Erwerb von inhaltsübergreifenden mathematischen Qualifikationen verwendet. Dies sollte auch tatsächlich Vorrang vor dem Erwerb technischer Fertigkeiten haben, wenn auch diese nicht vernachlässigt werden dürfen. Für das Begriffsverständnis und den Erwerb von Qualifikationen ist allerdings eine Vielzahl unterschiedlicher Erfahrungen nötig, die die Experimentelle Mathematik besser als die "übliche" Unterrichtsmethode liefern kann, Zum Fertigkeitserwerb genügt in der Regel die Wiederholung in möglichst gleichartigen Situationen. Berücksichtigt man noch die eingangs aufgezählten Gründe, so scheint es berechtigt zu sein, "Experimentelle Mathematik" zu betreiben.

LITERATUR

[1] Aebli, H.: Psychologische Didaktik

[2] Alle, G.: Differentialrechnung mit programmierbaren Taschenrechnern, Did.d.Math., 7.Jg.,Heft 3, S.180

[3] Bauer, L.: Mathematische Fähigkeiten, UTB Schöningh, Paderborn 1978

[4] Bergius, R.(Hrsg.): Handbuch der Psychologie in 12 Bänden, Band I, Göttingen 1964

[5] Borovcnik-Dörfler-Kautschitsch-Malle-Peschek: Mathematik in der beruflichen Praxis von Abiturienten, Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 5, HPT-Wien 1981

[6] Courant, R.-Robbins,H.: Was ist Mathematik, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970

[7] Dörfler-Fischer-Kautschitsch-Malle-Peschek: Mathematikunterricht und Qualifizierung, Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bnd 4, HPT-Wien 1981

[8] Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Stuttgart

[9] Fries, E., u.Rosenberger,R.: Forschender Unterricht, Diesterweg, Frankfurt/Main

[10] Goethe, J.W.: Wilhelm Meisters Wnderjahre, 2.Buch, 9.Kap.

[11] Jüngel, G.: Zum Problem des Transfers. In: Die Realschule, Heft 6, 1976

[12] Katona, G.: Organizing and memorizing, Stud.in the psychology of learning and teaching, Columbia Univ.Press, New York 1940

[13] Kerschensteiner, G.: Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichts, Leipzig und Berlin 1913

[14] Kirsch, A.: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht,DdM.3, 1976, S.248-253

[15] Kulkies, K.u.v.Bracht,E.: Morgen wissen wir mehr, Econ-Verlag, Düsseldorf - Wien 1967

[16] Piaget, J.: Psychologie der Intelligenz, Zürich 1948

[17] Rohracher, H.u.Meili,R.: Lehrbuch der experimentellen Psychologie, Hans Huber Bern - Stuttgart - Wien 1972.

[18] Saugstadt, P.: Problem-solving and availability of Functions, Acta Psych. 13, S.263-278

[19] Schmitt, H.: Geometrie in Primarstufe und Sekundarstufe I, Michael Prögl Verlag, Ansbach 1973

[20] Schuler, M.: Aktionen gegen die Mathematikverdünnung, math.did. 4, 169 (1981)

[21] v.Steinen,J.: Experimentelle Analysis, MNU, Jg.30,1977, S.23

[22] Sturm, J.Chr.: Arithmetica Juvenilis, Hoffmann u.Streek, Nürnberg

[23] Szekely,L.: Productive processes in learning and thinking, Acta Psych.7, S.398-407

[24] Wittmann,E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig 1974